

**Х.С. САМИДОВ**, д.т.н., проф., зав. кафедрой АзАСУ, Баку, Азербайджан

## ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ НЕСУЩИХ УЗЛОВ МАШИН

Работа посвящена решению актуальной научно-технической проблемы – анализу пространственных колебаний несущих узлов машин различного назначения.

Роботу присвячено рішення актуальної науково-технічної проблеми – аналізу просторових коливань несущих вузлів машин різного призначення.

This work is devoted to resolve important scientific and technological problems-analysis of spatial vibrations bearing units of machines for different purposes.

**Анализ литературы.** Наука располагает огромным количеством работ, посвященных исследованию динамики машин, В настоящее время при исследовании динамики машин, широко применяются в основном приближенные методы, сходящие расчеты сложных пространственных систем к расчетам дискретных плоских динамических моделей [1-5]. Такие упрощения, естественно, облегчают динамический расчет машин, но однако этот расчет не может претендовать на скрытие столь сложных пространственных колебаний во всех направлениях движения их отдельных узлов. Тем более, что исследование динамики системы в пространстве, в отличие от движения её на плоскости, требует построения нелинейных дифференциальных уравнений, содержащих различные нелинейные связи между кинематическими, динамическими и другими параметрами.

**Цель данной статьи.** Состоит в составлении пространственной динамической модели несущих узлов машин, каковыми эти машины по существу и являются, и выводе нелинейных дифференциальных уравнений, дающих возможность получить взаимосвязь их перемещений, скоростей и ускорений с основными характеристиками машин.

**Основной текст.** Каждая машина, например металлорежущий станок, имеет сложную конструктивную форму и состоит из нескольких несущих узлов – стола, суппорта, станины, бабки, каретки, ползуна, поперечины и т.д. Эти узлы представляют собой тяжелые трехмерные твердые тела и совершают пространственные движения при колебаниях станка.

Рассматриваемая обобщенная пространственная динамическая модель несущих узлов машин состоит из двух подвижных твердых тел, связанных между собой и с неподвижным основанием упругими элементами – условными пружинами (рисунок 1). Под твердым телом здесь понимается такой узел машин, при котором не изменяются расстояния между любыми двумя точками во все время его движения.

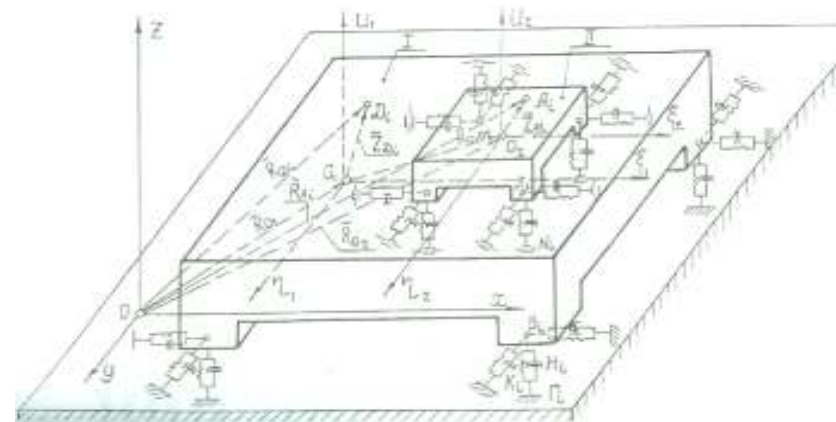


Рисунок 1 – Пространственная динамическая модель несущих узлов машин

**Математическое описание пространственных колебаний несущих узлов машин.** Для определения положения твердых тел (рисунок 2) в пространстве выбираем неподвижную систему координат  $Oxyz$ , общую для обоих тел, и две подвижные системы координат  $O_1\xi_1\eta_1u_1, O_2\xi_2\eta_2u_2$ , жестко связанные с центрами тяжести тел –  $O_1, O_2$  и движущиеся с ними.

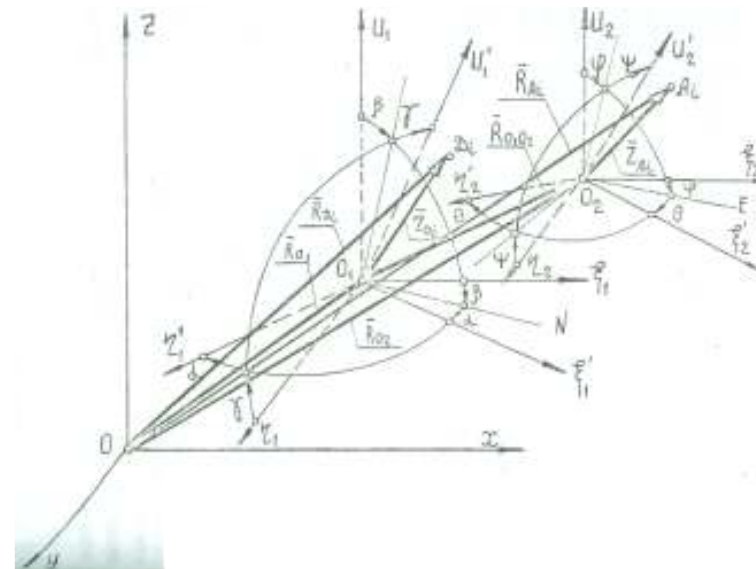


Рисунок 2 – Пространственная координатная система

Предположим что твердые тела с массами  $m$  и  $M$ , когда находятся в положении равновесия, оси подвижных систем координат  $O_1\xi_1\eta_1u_1, O_2\xi_2\eta_2u_2$ , соответственно параллельны осям неподвижной системы координат  $Oxyz$ . В

начальном положении, когда  $t=0$ , точка  $0_1$  совпадает с точкой  $0$ . начальные точки  $0_1$  и  $0_2$  подвижных систем координат во все время движения совпадают с центрами тяжести тел.

Пусть в промежуток времени  $t$  координатные системы  $0_1\xi_1\eta_1u_1, 0_2\xi_2\eta_2u_2$  занимают новые положения  $0_1\xi'_1\eta'_1u'_1$  и  $0_2\xi'_2\eta'_2u'_2$  (рисунок 2). Углы  $\alpha, \beta, \gamma$  и  $\theta, \varphi, \psi$  являются углами Эйлера, характеризующими вращательные движения соответственно первого и второго тел.

Очевидно, заданное положение в пространстве, например, твердого тела **I** с массой  $m$  эквивалентно заданному положению координатной системы  $0_1\xi_1\eta_1u_1$ . А для определения положения последнего необходимо знать шесть скалярных величин: координаты точки  $0_1 - x, y, z$  и углы Эйлера –  $\alpha, \beta, \gamma$ , которые являются в нашем случае обобщенными координатами **I** с массой  $m$ . За обобщенные координаты тела **II** с массой  $M$  будем принимать координаты точки  $0_2 - \xi_1, \eta_1, u_1$  и углы Эйлера –  $\theta, \varphi, \psi$ .

#### Кинетическая энергия рассматриваемой системы.

$$T = T_1 + T_2 = 1/2 \left( \sum_{i=1}^{n_1} m_i \bar{V}_{D_i}^2 + \sum_{i=1}^{n_2} M_i \bar{V}_{A_i}^2 \right) = 1/2 \left[ \sum_{i=1}^{n_1} m_i (\bar{V}_{0_1} + \bar{\omega}_{0_1} \times \bar{r}_{D_i})^2 + \sum_{i=1}^{n_2} M_i (\bar{V}_{0_1} + \bar{\omega}_{0_1} \times \bar{0}_1 \bar{0}_2 + \bar{\omega}_{0_2} \times \bar{r}_{A_i} + \bar{V}_{0_2 0_1} + \bar{\omega}_{0_1} \times \bar{r}_{A_i})^2 \right]. \quad (1)$$

$i = 1, 2, \dots, n_1; \quad i = 1, 2, \dots, n_2.$

**Потенциальная энергия системы.** Потенциальная энергия системы равна:

$$P = P_1 + P_2 + P_3; \quad (2)$$

$$P_1 = 1/2 \sum_{i=1}^{n_1} [K_{ix} (\Delta \ell_{ix})^2 + K_{iy} (\Delta \ell_{iy})^2 + K_{iz} (\Delta \ell_{iz})^2]; \quad (3)$$

$$P_2 = 1/2 \sum_{i=1}^{n_1} [\bar{K}_{i\xi_1} (\Delta L_{i\xi_1})^2 + K_{i\eta_1} (\Delta L_{i\eta_1})^2 + \bar{K}_{iu_1} (\Delta L_{iu_1})^2]; \quad (4)$$

$$P_3 = mgh_1 + Mgh_2. \quad (5)$$

**Диссипативные функции системы.** Для определения вязкого сопротивления движениям тел **I** и **II** вводим диссипативную функцию как квадратичную форму скоростей линейных и угловых перемещений этих тел. Если полагать, что силы сопротивления движению сосредоточены в точках присоединения упругих элементов соответствующих тел, то их диссипативные функции в координатной система  $0_1\xi_1\eta_1u_1$  будет определяться соотношениями:

$$\Phi_1 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m (h_{i\xi_1} \dot{\lambda}_{i\xi_1}^2 + h_{i\eta_1} \dot{\lambda}_{i\eta_1}^2 + h_{iu_1} \dot{\lambda}_{iu_1}^2); \quad (6)$$

$$\Phi_2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n_2} (\bar{h}_{i\xi_1} \dot{\lambda}_{i\xi_1}^2 + \bar{h}_{i\eta_1} \dot{\lambda}_{i\eta_1}^2 + \bar{h}_{iu_1} \dot{\lambda}_{iu_1}^2). \quad (7)$$

Уравнение Лагранжа II рода для рассматриваемого случая имеет вид

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} + \frac{\partial \Phi_i}{\partial \dot{q}_i} = Q_{q_i}, \quad (8)$$

где  $q_i(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma, \xi_1, \eta_1, u_1, \theta, \varphi, \psi)$  – обобщенные координаты;  $Q_{q_i}$  – активные обобщенные силы, действующие на систему.

Подставив в уравнение Лагранжа (8) выражения кинетической и потенциальной энергии (1)-(5) и диссипативной функции (6), (7), получим дифференциальные уравнения пространственных колебаний рассматриваемой системы [1]:

$$\begin{aligned} & (m + M) \ddot{x} + M (\ddot{\xi}_1 + 2\dot{u}_1 \dot{\beta} - 2\dot{\eta}_1 \dot{\alpha} + u_1 \ddot{\beta} - \eta_1 \ddot{\alpha} - \dot{\eta}_1 \dot{\alpha} + \beta \ddot{u}_1) + \frac{1}{8\ell_0^4} \times \\ & \times (2E_1 x + E_7 \alpha - E_8 \beta - E_9 \gamma + E_{16} y + E_{17} z) + H_1 \dot{x} - 2H_7 \dot{\alpha} + 2H_8 \dot{\beta} = Q_x; \\ & (m + M) \ddot{y} + M (\ddot{\eta}_1 + 2\dot{\xi}_1 \dot{\alpha} - 2\dot{u}_1 \gamma + \xi_1 \ddot{\alpha} - u_1 \ddot{\gamma} + \alpha \ddot{\xi}_1 - \gamma \ddot{u}_1) + \\ & + \frac{1}{8\ell_0^4} (2E_2 y + E_{10} a - E_{11} \beta + E_{12} \gamma + E_{16} x + E_{18} z) + H_2 \dot{y} - H_9 \dot{\gamma} = Q_y; \\ & (m + M) \ddot{z} + M (\ddot{u}_1 + 2\dot{\eta}_1 \dot{\gamma} - 2\dot{\xi}_1 \dot{\beta} + \eta_1 \ddot{\gamma} - \xi_1 \ddot{\beta} - \beta \ddot{\xi}_1 + \gamma \ddot{\eta}_1) + \\ & + \frac{1}{8\ell_0^4} (2E_3 z - E_{13} a - E_{14} \beta + E_{15} \gamma + E_{17} x + E_{18} y) + H_3 \dot{z} - H_{10} \dot{\beta} + H_{11} \dot{\gamma} + mg = Q_z; \\ & M (\ddot{z} \eta_1 - u_1 \ddot{y} - u_1 \ddot{\eta}_1 + \eta_1 \ddot{u}_1) + (J_{\xi_1}^I + J_{\xi_1}^{II} + J_{\xi_2}^{II}) \ddot{\gamma} + J_{\xi_1}^{II} \dot{\gamma} + (J_{\xi_1}^I - J_{\eta_1}^I + \\ & + J_{\xi_1}^{II} - J_{\eta_1}^{II} + J_{\xi_2}^{II} - J_{\eta_2}^{II}) (\ddot{\beta} a + \dot{\beta} \dot{\alpha}) + (J_{\xi_1}^{II} - J_{\eta_1}^{II}) \dot{\beta} \dot{\alpha} + (J_{\xi_1 \eta_1}^I + J_{\xi_1 \eta_1}^{II} + J_{\xi_2 \eta_2}^{II}) \times \\ & \times (2\ddot{\gamma} \alpha + 2\dot{\gamma} \dot{\alpha} - \ddot{\beta}) + J_{\xi_1 \eta_1}^{II} (2\dot{\gamma} \alpha - \dot{\beta}) + (J_{\eta_1 u_1}^I + J_{\eta_1 u_1}^{II} + J_{\eta_2 u_2}^{II}) \times \\ & \times (\ddot{a} \alpha + \dot{a}^2 - \dot{\beta}^2) + J_{\eta_1 u_1}^{II} \dot{a} a + (J_{\xi_1 u_1}^I + J_{\xi_1 u_1}^{II} + J_{\xi_2 u_2}^{II}) (\dot{\beta} \gamma - \dot{\alpha}) + J_{\xi_1 u_1}^{II} (\dot{\beta} \gamma - \dot{\alpha}) - \\ & - J_{\xi_2 \eta_2}^{III} (\ddot{\varphi} - \ddot{\theta} \psi - \dot{\theta} \dot{\psi} - \ddot{\psi} \alpha - \dot{\psi} \dot{\alpha}) + J_{\xi_2}^{II} (\ddot{\psi} + \ddot{\theta} \varphi + \dot{\theta} \dot{\varphi}) - J_{\eta_2}^{II} (\ddot{\alpha} a + \dot{\alpha} \dot{\alpha}) - \\ & - J_{\xi_2 u_2}^{II} (\ddot{\theta} - \ddot{\psi} \varphi - \dot{\psi} \dot{\varphi}) + J_{\eta_2 u_2}^{II} (\ddot{\theta} a + \dot{\theta} \dot{\alpha}) + (J_{u_1}^I + J_{u_1}^{II} + J_{u_2}^{II}) \dot{a} \dot{\beta} + J_{u_2}^{II} \dot{\beta} \dot{\theta} - \\ & - J_{\xi_2 u_2}^{II} \dot{\beta} \dot{\psi} - J_{\eta_2 u_2}^{II} \dot{\beta} \dot{\varphi} + \frac{1}{8\ell_0^4} (2E_6 \gamma - E_9 x + E_{12} y + E_{15} z + E_{20} a - E_{21} \beta) + \\ & + Mg(\xi_1 a - \eta_1 - u_1 \gamma) + H_6 \dot{\gamma} - H_9 \dot{y} + H_{11} \dot{z} - H_{13} \dot{\beta} = Q_\gamma; \\ & M (u_1 \ddot{x} - \xi_1 \ddot{z} + u_1 \ddot{\xi}_1 - \xi_1 \ddot{u}_1) + (J_{\eta_1}^I + J_{\eta_1}^{II} + J_{\eta_2}^{II}) \ddot{\beta} + J_{\eta_1}^{II} \dot{\beta} - (J_{u_1}^I + J_{u_1}^I + \\ & + J_{u_2}^{II}) (\ddot{a} \gamma + \dot{\alpha} \dot{\gamma}) - J_{u_1}^{II} \dot{a} \gamma + (J_{\xi_1}^I - J_{\eta_1}^I + J_{\xi_1}^{II} - J_{\eta_1}^{II} + J_{\xi_2}^{II} - J_{\eta_2}^{II}) \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times (\ddot{\gamma}\alpha + \dot{\gamma}\dot{\alpha}) + J_{u_1}^{\prime\prime} \ddot{\alpha}\gamma + (J_{\xi_1}^I - J_{\eta_1}^I + J_{\xi_1}^{\prime\prime} - J_{\eta_1}^{\prime\prime} + J_{\xi_2}^{\prime\prime} - J_{\eta_2}^{\prime\prime}) \times \\
& \times (\ddot{\gamma}\alpha + \dot{\gamma}\dot{\alpha}) + (J_{\xi_1}^{\prime\prime} - J_{\eta_1}^I) \ddot{\gamma}\alpha - (J_{\xi_1\eta_1}^I + J_{\xi_1\eta_1}^{\prime\prime} + J_{\xi_2\eta_2}^{\prime\prime}) (\ddot{\gamma} + 2\dot{\beta}\dot{\alpha} + 2\dot{\beta}\dot{\alpha}) - \\
& - J_{\xi_1\eta_1}^{\prime\prime} (\dot{\gamma} + 2\dot{\beta}\dot{\alpha}) + (J_{\eta_1u_1}^I + J_{\eta_1u_1}^{\prime\prime} + J_{\eta_2u_2}^{\prime\prime}) (2\dot{\beta}\dot{\gamma} + \ddot{\beta}\dot{\gamma} - \ddot{\alpha}) + J_{\eta_1u_1}^{\prime\prime} (2\dot{\beta}\dot{\gamma} - \dot{\alpha}) + \\
& + (J_{\xi_1u_1}^I + J_{\xi_1u_1}^{\prime\prime} + J_{\xi_2u_2}^{\prime\prime}) (\ddot{\gamma}\dot{\gamma} - \dot{\gamma}^2 - \ddot{\alpha}\dot{\alpha} - \dot{\alpha}^2) + J_{\xi_1u_1}^{\prime\prime} (\dot{\gamma}\dot{\gamma} - \dot{\alpha}\dot{\alpha}) + J_{\xi_2}^{\prime\prime} (\ddot{\psi}\dot{\alpha} + \dot{\psi}\dot{\alpha}) + \\
& + J_{\eta_2}^{\prime\prime} (\ddot{\phi} - \ddot{\theta}\psi - \ddot{\theta}\dot{\psi}) - J_{u_2}^{\prime\prime} (\ddot{\theta}\dot{\gamma} + \ddot{\theta}\dot{\gamma}) - J_{\varepsilon_2\eta_2}^{\prime\prime} (\ddot{\phi}\dot{\alpha} + \dot{\phi}\dot{\alpha} + \ddot{\psi} + \ddot{\theta}\dot{\phi} + \ddot{\theta}\dot{\phi}) - \\
& - J_{\xi_2u_2}^{\prime\prime} (\ddot{\alpha} + \ddot{\alpha} - \ddot{\psi}\dot{\gamma} - \dot{\psi}\dot{\gamma}) - J_{\eta_2u_2}^{\prime\prime} (\ddot{\theta} - \ddot{\psi}\dot{\phi} - \dot{\psi}\dot{\phi} - \ddot{\phi}\dot{\gamma} - \dot{\phi}\dot{\gamma}) + \\
& \frac{1}{8\ell_0^4} (2E_5\beta - E_8x - E_{11}y - E_{14}z - E_{19}a - E_{21}\beta) + \\
& + Mg(\eta_1a - \xi_1 - u_1\beta) + H_5\dot{\beta} + H_8\dot{x} - H_{10}\dot{z} - H_{12}\dot{a} - H_{13}\dot{\gamma} = Q_\beta; \\
& M(\xi_1\ddot{y} - \eta_1\ddot{x} - \eta_1\ddot{\xi} + \xi_1\ddot{\eta}) + (J_{u_1}^I + J_{u_1}^{\prime\prime} + J_{u_2}^{\prime\prime}) (\ddot{a} - \ddot{\beta}\dot{\gamma} - \dot{\beta}\dot{\gamma}) + \\
& + J_{u_1}^{\prime\prime} (\dot{a} - \dot{\beta}\dot{\gamma}) + (J_{\eta_1u_1}^I + J_{\eta_1u_1}^{\prime\prime} + J_{\eta_2u_2}^{\prime\prime}) (\ddot{a} - \ddot{\beta}) - J_{\eta_1u_1}^{\prime\prime} (\dot{\beta} - \dot{\gamma}\dot{a}) - \\
& - (J_{\xi_1u_1}^I + J_{\xi_1u_1}^{\prime\prime} + J_{\xi_2u_2}^{\prime\prime}) (\ddot{\beta}\dot{\alpha} + \dot{\gamma}) - J_{\xi_1u_1}^{\prime\prime} (\dot{\gamma} + \dot{\beta}\dot{a}) + J_{u_2}^{\prime\prime} (\ddot{\theta} - \ddot{\psi}\dot{\phi} - \dot{\psi}\dot{\phi}) - \\
& - J_{\xi_2u_2}^{\prime\prime} (\ddot{\psi} + \ddot{\theta}\dot{\phi} + \ddot{\theta}\dot{\phi} - \dot{\beta}\dot{\theta}) + J_{\eta_2u_2}^{\prime\prime} (\ddot{\theta}\dot{\psi} + \ddot{\theta}\dot{\psi} - \ddot{\phi} - \dot{\gamma}\dot{\theta}) - \\
& - (J_{\xi_1}^I - J_{\eta_1}^I + J_{\xi_1}^{\prime\prime} - J_{\eta_1}^{\prime\prime} + J_{\xi_2}^{\prime\prime} - J_{\eta_2}^{\prime\prime}) \dot{\beta}\dot{\gamma} + (J_{\xi_1\eta_1}^I + J_{\xi_1\eta_1}^{\prime\prime} + J_{\xi_2\eta_2}^{\prime\prime}) \times \\
& \times (\dot{\beta}^2 - \dot{\gamma}^2) - J_{\xi_2}^{\prime\prime} \dot{\beta}\dot{\psi} + J_{\eta_2}^{\prime\prime} \dot{\gamma}\dot{\phi} + J_{\xi_2\eta_2}^{\prime\prime} (\dot{\beta}\dot{\phi} - \dot{\gamma}\dot{\psi}) + \\
& + \frac{1}{8\ell_0^4} (2E_4a + E_7x + E_{10}y - E_{13}z - E_{19}\beta + E_{20} + \gamma) \\
& + Mg(\xi_1\gamma + \eta_1\beta) + H_4\dot{a} - H_7\dot{x} - H_{12}\dot{\beta} = Q_\alpha; \\
& M(\ddot{\xi}_1 + \ddot{x} + a\ddot{y} - \beta\ddot{z} + 2\dot{u}_1\dot{\beta} - 2\dot{\eta}_1\dot{a} + u_1\ddot{\beta} - \eta_1\ddot{\alpha}) + \frac{1}{8\ell_0^4} (2\bar{E}_1\xi_1 + \\
& + \bar{E}_7\theta - \bar{E}_8\varphi - \bar{E}_9\psi + \bar{E}_{16}\eta_1 + \bar{E}_{17}u_1 + 3\bar{E}_{22}\xi_1^2 + 2\bar{E}_{28}\xi_1\eta_1 + \\
& + 2\bar{E}_{29}\xi_1u_1 + \bar{E}_{30}\eta_1^2 + \bar{E}_{32}u_1^2 + 2\bar{E}_{34}\xi_1\theta - 2\bar{E}_{35}\xi_1\varphi + 2\bar{E}_{36}\xi_1\psi + \\
& + \bar{E}_{43}\theta^2 - \bar{E}_{46}\varphi^2 + \bar{E}_{49}\psi^2 + \bar{E}_{58}\eta_1u_1 + \bar{E}_{59}\eta_1\theta + \bar{E}_{60}\eta_1\varphi + \\
& + \bar{E}_{61}\eta_1\psi + \bar{E}_{62}u_1\theta + \bar{E}_{63}u_1\varphi + \bar{E}_{64}u_1\psi + \bar{E}_{68}\theta\varphi + \bar{E}_{69}\theta\psi + \\
& + \bar{E}_{70}\varphi\psi + Mg(a\gamma - \beta) + H_{14}\dot{\xi}_1 - H_{20}\dot{\theta} + H_{21}\dot{\phi} = Q_{\xi_1}; \\
& M(\ddot{\eta}_1 + \ddot{y} + \gamma\ddot{z} + a\ddot{x} + 2\dot{u}_1\dot{\gamma} + 2\dot{\xi}_1\dot{a} - u_1\ddot{\gamma} + \xi_1\ddot{\alpha}) + \frac{1}{8L_0^4} (2\bar{E}_2\eta_1 + \\
& + \bar{E}_{10}\theta - \bar{E}_{11}\varphi - \bar{E}_{12}\psi + \bar{E}_{16}\xi_1 + \bar{E}_{18}u_1 + 3\bar{E}_{23}\eta_1^2 + \bar{E}_{28}\xi_1^2 + 2\bar{E}_{30}\eta_1\xi_1 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2\bar{E}_{31}\eta_1u_1 + \bar{E}_{33}u_1^2 + 2\bar{E}_{37}\eta_1\theta - 2\bar{E}_{38}\eta_1\varphi + 2\bar{E}_{39}\eta_1\psi + \bar{E}_{44}\theta^2 + \\
& + \bar{E}_{47}\varphi^2 + \bar{E}_{50}\psi^2 + \bar{E}_{58}\xi_1u_1 + \bar{E}_{59}\xi_1\theta + \bar{E}_{60}\xi_1\varphi + \bar{E}_{61}\xi_1\psi + \\
& + \bar{E}_{65}u_1\theta + \bar{E}_{66}u_1\varphi + \bar{E}_{67}u_1\psi - \bar{E}_{71}\theta\varphi + \bar{E}_{72}\theta\psi + \bar{E}_{73}\varphi\psi) + \\
& + Mg(a\beta + \gamma) + H_{15}\dot{\eta}_1 + H_{22}\dot{\theta} - H_{23}\dot{\psi} = Q_{\eta_1}; \\
& - \bar{E}_{14}\varphi - \bar{E}_{15}\psi + \bar{E}_{17}\xi_1 + \bar{E}_{18}\eta_1 + 3\bar{E}_{24}u_1^2 + \bar{E}_{29}\xi_1^2 + E_{31}\eta_1^2 + 2E_{32}\xi_1u_1 + \\
& + \bar{E}_{33}u_1\eta_1 + 2\bar{E}_{40}u_1\theta - 2\bar{E}_{41}u_1\varphi + 2\bar{E}_{42}u_1\psi + \bar{E}_{45}\theta^2 + \bar{E}_{48}\varphi^2 + \bar{E}_{51}\psi^2 + \\
& M(\ddot{u}_1 + \ddot{z} + \beta\ddot{x} - \dot{\gamma}\dot{y} + 2\dot{\eta}_1\dot{\gamma} - 2\dot{\xi}_1\dot{\beta} + \eta_1\ddot{\gamma} - \xi_1\ddot{\beta}) + \frac{1}{8L_0^4} (2\bar{E}_3u_1 - \bar{E}_{13}\theta - \\
& + \bar{E}_{58}\xi_1\eta_1 + \bar{E}_{62}\xi_1\theta + \bar{E}_{63}\xi_1\varphi + \bar{E}_{64}\xi_1\psi + \bar{E}_{65}\eta_1\theta + \bar{E}_{66}\eta_1\varphi + \\
& + \bar{E}_{67}\eta_1\psi + \bar{E}_{74}\theta\varphi + \bar{E}_{75}\theta\psi - \bar{E}_{76}\varphi\psi) + Mg(1 - \beta^2 / 2 - \gamma_2^2) + \\
& + H_{16}\dot{u}_1 - H_{24}\dot{\phi} + H_{25}\dot{\psi} = Q_{u_1}; \\
& J_{\xi_2}^{\prime\prime} (\ddot{\psi} + \ddot{\theta}\dot{\phi} + \ddot{\theta}\dot{\phi} + \ddot{\gamma} + \dot{\beta}\dot{a} + \dot{\beta}\dot{\alpha}) + J_{\eta_2}^{\prime\prime} (\dot{\phi}\dot{\theta} + \dot{\beta}\dot{\theta}) - \\
& - J_{u_2}^{\prime\prime} (\ddot{\theta}\dot{\phi} + \ddot{\theta}\dot{\phi} + \ddot{a}\dot{\phi} + \dot{a}\dot{\phi}) - J_{\xi_2\eta_2}^{\prime\prime} (\ddot{\phi} - \ddot{\theta}\dot{\psi} + \dot{\beta} - \dot{\gamma}\dot{a} - \dot{\gamma}\dot{\alpha} + \dot{\gamma}\dot{\theta}) - \\
& - J_{\xi_2u_2}^{\prime\prime} (\ddot{\theta} - 2\ddot{\psi}\dot{\phi} - 2\ddot{\psi}\dot{\phi} + \ddot{a} - \ddot{\gamma}\dot{\phi} - \dot{\gamma}\dot{\phi} - \dot{\beta}\dot{\gamma} - \dot{\beta}\dot{\gamma}) + \\
& + J_{\eta_2u_2}^{\prime\prime} (\ddot{\phi}\dot{\phi} + \dot{\phi}^2 + \ddot{\beta}\dot{\phi} + \dot{\beta}\dot{\phi} - \dot{\theta}^2 - \dot{a}\dot{\theta}) + \frac{1}{8L_0^4} (2\bar{E}_6\psi - \bar{E}_9\xi_1 + \bar{E}_{12}\eta_1 + \bar{E}_{15}u_1 + \\
& + \bar{E}_{20}\theta - \bar{E}_{21}\varphi + 3\bar{E}_{27}\psi^2 + \bar{E}_{36}\xi_1^2 + \bar{E}_{39}\eta_1^2 + \bar{E}_{41}u_1^2 + 2\bar{E}_{49}\varphi\xi_1 + \\
& + 2\bar{E}_{50}\psi\eta_1 + 2\bar{E}_{51}\psi u_1 + \bar{E}_{53}\theta^2 + \bar{E}_{55}\varphi^2 + 2\bar{E}_{56}\psi\theta - 2\bar{E}_{57}\psi\varphi + \bar{E}_{61}\xi_1\eta_1 + \\
& + \bar{E}_{64}\xi_1u_1 + \bar{E}_{67}\eta_1u_1 + \bar{E}_{69}\xi_1\theta + \bar{E}_{70}\xi_1\varphi + \bar{E}_{72}\eta_1\theta + \bar{E}_{73}\eta_1\varphi + \bar{E}_{75}u_1\theta - \\
& - \bar{E}_{76}u_1\varphi + \bar{E}_{77}\theta\varphi) + H_{19}\dot{\psi} - H_{23}\dot{\eta}_1 + H_{25}\dot{u}_1 - H_{27}\dot{\theta} - H_{28}\dot{\phi} = Q_{\psi_1}; \\
& J_{\eta_1}^{\prime\prime} (\ddot{\phi} - \ddot{\theta}\dot{\psi} - \ddot{\theta}\dot{\psi} + \dot{\beta} - \dot{\gamma}\dot{a} - \dot{\gamma}\dot{\alpha}) - J_{\xi_2}^{\prime\prime} (\ddot{\psi}\dot{\theta} + \dot{\gamma}\dot{\theta}) + J_{u_2}^{\prime\prime} (\ddot{\psi}\dot{\theta} + \dot{\alpha}\dot{\psi}) - \\
& - J_{\xi_2\eta_2}^{\prime\prime} (\ddot{\psi} + \ddot{\theta}\dot{\phi} + \ddot{\gamma} + \dot{\beta}\dot{\alpha} + \dot{\beta}\dot{\alpha} - \dot{\beta}\dot{\theta}) + J_{\xi_2u_2}^{\prime\prime} (\dot{\theta}^2 - \dot{\psi}^2 - \dot{\gamma}\dot{\psi} + \dot{\alpha}\dot{\theta}) - \\
& - J_{\eta_2u_2}^{\prime\prime} (\ddot{\theta} - \ddot{\psi}\dot{\phi} + \ddot{a} - \dot{\beta}\dot{\gamma} - \dot{\beta}\dot{\gamma} + \dot{\beta}\dot{\psi}) + \frac{1}{8L_0^4} (2\bar{E}_5\varphi - \bar{E}_8\xi_1 - \\
& - \bar{E}_{11}\eta_1 - \bar{E}_{14}u - \bar{E}_{19}\theta - \bar{E}_{21}\psi - 3\bar{E}_{26}\varphi^2 - \bar{E}_{35}\xi_1^2 - \bar{E}_{41}u_1^2 - 2\bar{E}_{46}\varphi\xi_1 + \\
& + 2\bar{E}_{47}\varphi\eta_1 + 2\bar{E}_{48}\varphi u_1 - \bar{E}_{52}\theta^2 + 2\bar{E}_{54}\varphi\theta + 2\bar{E}_{55}\varphi\psi - \bar{E}_{57}\psi^2 + \\
& + \bar{E}_{60}\xi_1\eta_1 + \bar{E}_{63}\xi_1u_1 + \bar{E}_{66}\eta_1u_1 + \bar{E}_{68}\xi_1\theta + \bar{E}_{70}\xi_1\psi - \bar{E}_{71}\eta_1\theta + \\
& + \bar{E}_{73}\eta_1\psi + \bar{E}_{74}u_1\theta - \bar{E}_{76}u_1\psi + \bar{E}_{77}\theta\psi) + H_{18}\dot{\phi} + H_{21}\dot{\xi}_1 - H_{24}\dot{u}_1 - H_{26}\dot{\theta} - H_{28}\dot{\psi} = Q_\varphi; \\
& J_{u_2}^{\prime\prime} (\ddot{\theta} + \ddot{\alpha} - \dot{\beta}\dot{\gamma} - \dot{\beta}\dot{\gamma}) + (J_{\xi_2}^{\prime\prime} - J_{u_2}^{\prime\prime}) (\ddot{\psi}\dot{\phi} + \dot{\psi}\dot{\phi}) + J_{\xi_2}^{\prime\prime} (\dot{\gamma}\dot{\phi} + \dot{\gamma}\dot{\phi}) -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -J_{\eta_2}^{II}(\ddot{\varphi}\psi + \dot{\varphi}\dot{\psi} + \ddot{\beta}\psi + \dot{\beta}\dot{\psi}) - J_{\xi_2\eta_2}^{II}(\ddot{\varphi}\varphi + \dot{\varphi}^2 - \ddot{\psi}\psi - \dot{\psi}^2 + \ddot{\beta}\varphi + \\
& + \dot{\beta}\dot{\varphi} - \ddot{\gamma}\psi - \dot{\gamma}\dot{\psi}) - J_{\xi_2u_2}^{II}(2\ddot{\theta}\varphi + 2\dot{\theta}\dot{\varphi} + \ddot{\psi} + \dot{\gamma} + \ddot{\beta}\alpha + \dot{\beta}\dot{\alpha} + \ddot{\alpha}\varphi + \\
& + \dot{\alpha}\dot{\varphi}) - J_{\eta_2u_2}^{II}(\ddot{\varphi} - 2\ddot{\theta}\psi - \ddot{\beta} - 2\dot{\theta}\dot{\psi} - \ddot{\gamma}\alpha - \dot{\gamma}\dot{\alpha} - \ddot{\alpha}\psi - \dot{\alpha}\dot{\psi}) + \\
& + \frac{1}{8L_0^4}(2\bar{E}_{40}\theta + \bar{E}_{70}\xi_1 + \bar{E}_{10}\eta_1 - \bar{E}_{13}u_1 - \bar{E}_{19}\varphi + \bar{E}_{20}\psi + 3\bar{E}_{25}\theta^2 + \bar{E}_{34}\xi_1^2 + \\
& + \bar{E}_{37}\eta_1^2 + \bar{E}_{40}u_1^2 + 2\bar{E}_{43}\theta\xi_1 + 2\bar{E}_{44}\theta\eta_1 + 2\bar{E}_{45}\theta u_1 - 2\bar{E}_{52}\theta\varphi + 2\bar{E}_{53}\theta\psi + \\
& + \bar{E}_{54}\varphi^2 + \bar{E}_{56}\psi^2 + \bar{E}_{59}\xi_1\eta_1 + \bar{E}_{62}\xi_1u_1 + \bar{E}_{65}\eta_1u_1 + \bar{E}_{68}\xi_1\varphi + \bar{E}_{69}\xi_1\psi - \\
& - \bar{E}_{71}\eta_1\varphi + \bar{E}_{72}\eta_1\psi + \bar{E}_{74}u_1\varphi + \bar{E}_{75}u_1\psi + \bar{E}_{77}\varphi\psi) + H_{17}\dot{\theta} - H_{20}\dot{\xi}_1 + \\
& + H_{22}\dot{\eta}_1 - H_{26}\dot{\varphi} - H_{27}\dot{\psi} = Q_\theta.
\end{aligned} \quad (9)$$

Как известно, для расчета и моделирования колебаний любой системы на ЭВМ, прежде всего, необходимо уравнение ее движения привести к машинному виду. Машинная запись системы уравнений движения отрезных суппортов и резцедержателя трубоотрезного станка 91A25, составленная на основании выражений (9) и числовых значений параметров, приведенных в работах [1, 2], имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
\ddot{x} &= -0,74(\ddot{\xi}_1 + 2\dot{u}_1\dot{\beta} - 2\dot{\eta}_1\dot{\alpha}) - 124\dot{x} - 411111x + 14000\gamma + 2,4 \operatorname{sign} \dot{x}; \\
\ddot{y} &= -0,70(\ddot{\eta}_1 + 2\dot{\xi}_1\dot{\alpha} - 2\dot{u}_1\dot{\gamma}) - 107\dot{y} - 418367y + 21121\beta - 1,9 \operatorname{sign} \dot{y}; \\
\ddot{z} &= -0,70(\ddot{u}_1 + 2\dot{\eta}_1\dot{\gamma} - 2\dot{\xi}_1\dot{\beta}) - 185,3\dot{z} + 326667z + 18222\alpha; \\
\ddot{\gamma} &= -0,90(\ddot{\psi} + \dot{\theta}\dot{\varphi}) + 0,2\dot{\beta}\dot{\alpha} + 1,1\dot{\varphi}\dot{\alpha} - 0,8\dot{\alpha}\dot{\beta} - 0,7\dot{\theta}\dot{\beta} - 37\gamma - \\
& - 50000\gamma + 124340x - 65(\xi_1\alpha + \eta_1 - u_1\gamma); \\
\ddot{\beta} &= -0,90(\ddot{\varphi} - \dot{\theta}\dot{\psi}) - 0,5\dot{\alpha}\dot{\gamma} - 0,8\dot{\alpha}\dot{\psi} + 0,6\dot{\theta}\dot{\gamma} - 27\dot{\beta} - \\
& - 27000\beta + 232000y - 75(\eta_1\alpha - \xi_1 - u_1\beta); \\
\ddot{\alpha} &= -0,90(\ddot{\theta} - \dot{\psi}\dot{\varphi}) + \dot{\beta}\dot{\gamma} - 0,23\dot{\beta}\dot{\gamma} + 1,2\dot{\psi}\dot{\beta} - 1,4\dot{\gamma}\dot{\varphi} - \\
& - 40\dot{\alpha} - 196000\alpha + 282760z - 101(\xi_1\gamma + \eta_1\beta); \\
\ddot{\xi}_1 &= -\ddot{x} - 2\dot{u}_1\dot{\beta} + 2\dot{\eta}_1\dot{\alpha} - 152\xi_1 - 600000\xi_1 + 36800\psi - \\
& - \alpha\gamma + \beta + 36(0,86 - 0,5\varphi)\sin \Omega t - 2 \operatorname{sign} \dot{\xi}_1; \\
\ddot{\eta}_1 &= -\ddot{y} + 2\dot{u}_1\dot{\gamma} - 2\dot{\xi}_1\dot{\alpha} - 154\dot{\eta}_1 - 776471\eta_1 + 60000\varphi - \\
& - 9,8(\alpha\beta + \gamma + 27(0,5\psi - 0,86\theta)\sin \Omega t - 0,9 \operatorname{sign} \dot{\eta}_1); \\
\ddot{u}_1 &= -\ddot{z} - 2\dot{\eta}_1\dot{\gamma} + 2\dot{\xi}_1\dot{\beta} - 347\dot{u}_1 - 1173333u_1 + 27333\theta - \\
& - 10 + 30(0,5 + 0,86\varphi)\sin \Omega t - 0,6 \operatorname{sign} \dot{u}_1; \\
\ddot{\psi} &= -\ddot{\gamma} - \dot{\theta}\dot{\gamma} - \dot{\beta}\dot{\alpha} - 1,2(\dot{\varphi}\dot{\theta} + \dot{\beta}\dot{\theta}) + 0,8(\dot{\theta}\dot{\varphi} + \dot{\alpha}\dot{\varphi}) - 40\dot{\psi} - \\
& - 53000\varphi + 270000\xi_1 + 265(0,5\eta_1 + \theta u_1 + 0,86\eta_1\varphi)\sin \Omega t;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\ddot{\varphi} &= -\ddot{\beta} + \dot{\theta}\dot{\psi} + \dot{\gamma}\dot{\alpha} + 0,9(\dot{\psi}\dot{\theta} + \dot{\gamma}\dot{\theta}) - 0,65(\dot{\psi}\dot{\theta} + \dot{\alpha}\dot{\psi}) - 30\dot{\varphi} - \\
& - 95000\varphi + 502500\eta_1 + 225(u_1 - 0,86\eta_1\psi - 0,86\eta_1\theta)\sin \Omega t; \\
\ddot{\theta} &= -\ddot{\alpha} + \dot{\beta}\dot{\alpha} - 0,3\dot{\psi}\dot{\varphi} - 1,3\dot{\gamma}\dot{\varphi} + 1,5(\dot{\varphi}\dot{\psi} + \dot{\beta}\dot{\psi}) - 60\dot{\theta} - \\
& - 322814\theta + 570000u_1 + 342(0,5\eta_1 - \psi u_{11} - 0,86\eta_1)\sin \Omega t.
\end{aligned} \quad (10)$$

Для шпиндельной бабки трубоотрезного станка 91A38 получаем следующие машинные уравнения:

$$\begin{aligned}
\ddot{x} &= -16\dot{x} - 10^5 3x + 5314\gamma + 9,5(0,86 - 0,5\beta)\sin \omega t; \\
\ddot{y} &= -79,4\dot{y} - 10^5 \cdot 4,1y + 6825\beta + 9,5(0,5\gamma - 0,86\alpha)\sin \omega t; \\
\ddot{z} &= -83,3\dot{z} - 10^5 \cdot 7,2z + 4444\alpha + 9,5(0,5 + 0,86\beta)\sin \omega t; \\
\ddot{\gamma} &= -97,4\dot{\gamma} - 10^5 \cdot 8,1\gamma + 88158x + 158(0,5y + \alpha z + 0,86y\beta)\sin \omega t; \\
\ddot{\beta} &= -80\dot{\beta} - 10^5 \cdot 5,2\beta + 99000y + 138(z - 0,86y\gamma - 0,5y\alpha)\sin \omega t; \\
\ddot{\alpha} &= -57\dot{\alpha} - 10^5 \cdot 5,7\alpha + 55000z + 118(0,5y\beta - z\gamma - 0,86y)\sin \omega t.
\end{aligned} \quad (11)$$

Дифференциальные уравнения движения ползуна поперечно-строгального станка, на основании данных, заимствованных из работы [1], имеют вид:

$$\begin{aligned}
\ddot{x} &= -12,3\dot{x} - 2244900x + 17143\gamma + 32,7(0,86 - 0,5\beta)\sin \omega t; \\
\ddot{y} &= -144,2\dot{y} - 1442308y + 577\beta + 15,4(0,5\gamma - 0,86\alpha)\sin \omega t; \\
\ddot{z} &= -90\dot{z} - 721622z + 541\alpha - 9,8 + 10,8(0,5 + 0,86\beta)\sin \omega t; \\
\ddot{\gamma} &= -117\dot{\gamma} - 554000\gamma + 64615x + 123(0,5y + \alpha z + 0,86y\beta)\sin \omega t; \\
\ddot{\beta} &= -56,8\dot{\beta} - 721000\beta + 3700y + 99(z - 0,86y\gamma - 0,5y\alpha)\sin \omega t; \\
\ddot{\alpha} &= -75\dot{\alpha} - 300000\alpha + 10000z + 200(0,5y\beta - z\gamma - 0,86y)\sin \omega t.
\end{aligned} \quad (12)$$

Первоначальное исследование пространственных колебаний станков, согласно системы дифференциальных уравнений (9), проведено на АВМ. Окончательное исследование выполнено путем решения дифференциальных уравнений (10-12) на ЭВМ. Определены сочетания параметров системы станка, обеспечивающие ей устойчивые пространственные колебания с наименьшими амплитудами, влияние отдельных параметров системы на характер колебательных процессов.

В результате расчета на ЭЦВМ построены графики колебаний отрезных суппортов и резцедержателя трубоотрезного станка 91A25. Весьма сложную пространственную форму колебаний имеет резцедержатель трубоотрезного станка, закрепленный к заднему отрезному суппорту. Амплитуда колебаний режущей кромки в направлении оси  $z$  в зоне основного резонанса достигает до 138 мкм. Как видно из рисунка 3, амплитуда колебаний резцедержателя в областях первого и второго резонансов заметно уменьшается с увеличением значения коэффициента жесткости соединительных элементов в направлении оси  $z$ , а после достижения значения  $K=178 \cdot 10^6 \text{ Н} \cdot \text{м}^{-1}$  незначительно увеличивается.

Анализ колебаний суппорта трубоотрезных станков при его движении в направлении подачи режущего инструмента показывает, что одним из основных факторов, влияющих на уровень вибрации, являются демпфирующие характеристики неподвижных стыков (см. рисунок 3). При этом немаловажную

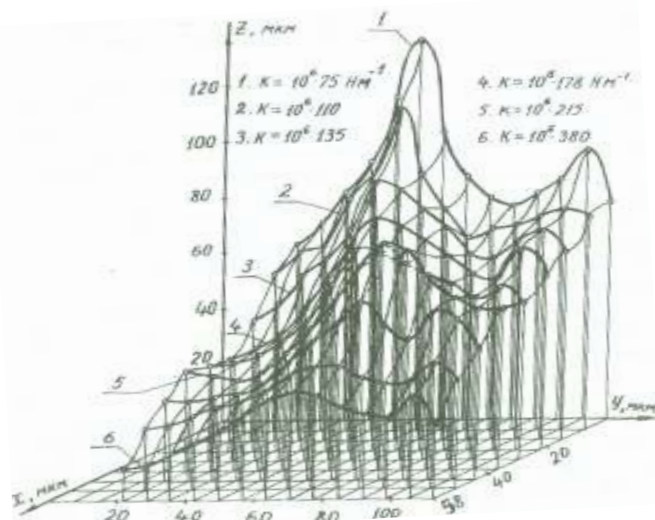


Рисунок 3 – Пространственные колебания резцедержателя трубоотрезного станка 91А25 при различных значениях коэффициента жесткости соединительных элементов в направлении оси Z

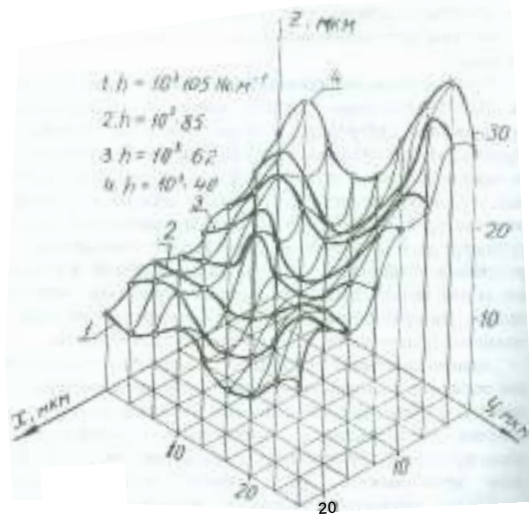


Рисунок 4 – Пространственные колебания отрезного суппорта станка 91А25 при различных значениях коэффициента вязкого сопротивления в направлении оси Z

роль играют также изменения жесткости элементов соединения, изменение ориентации силы резания и точки её приложения. Изменение конструкций отрезных суппортов и расположения отрезных резцов по предложенной нами схеме оказывают положительное влияние на виброустойчивость трубоотрезных станков.

Теоретические и экспериментальные исследования и моделирования на ЭВМ показывают, что в металлорежущих станках из-за перекачки энергии между обобщенными координатами системы станка можно появления периодических или почти периодических колебаний в зоне основного, суб- и супергармонического резонансов, которые могут быть обнаружены только при нелинейной постановке и решении подобных задач.

### Выводы:

1. Несущие узлы машин совершают пространственные колебания, главной причиной которых является наличие нелинейных связей между упругой системой системы и рабочими процессами.
2. Разработана и реализована методика исследования пространственных нелинейных колебаний несущих узлов машин; изучены условия возникновения, развития и взаимного влияния пространственных колебаний машин и критерий устойчивости движения в резонансных и нерезонансных режимах работы.
3. Эффективными способами снижения интенсивности пространственных колебаний машин при резонансе для заданного уровня возбуждения являются повышение жесткости, увеличение вязкого сопротивления и расстройки частот системы.
4. В металлорежущих станках из-за перекачки энергии между обобщенными координатами системы станка возможны появления периодических или почти периодических колебаний в зоне основного суб- и супергармонического резонансов.
5. Изучение пространственных колебаний машин в более строгой постановке вырабатывает комплексный подход к исследованию их динамики технологии обработки и является реальной основой создания высокоэффективного оборудования, соответствующего современным требованиям техники.

**Список литературы:** 1. Самидов Х.С., Самидов Э.Х. Динамика и оптимальное конструирование машин. – Баку: Изд. "Нурлан", 2003. – 622с. 2. Самидов Х.С. Пространственные колебания несущих узлов металлорежущих станков // Материалы II Всесоюзного съезда по ТММ. – Ч.2. – К.: Наука, 1982. – 119с. 3. Вибрации в технике. Справочник в 6 томах. – М.: Машиностроение, 1976-1980. – Т.1. – 352с., Т.6. – 456с. 4. Самидов Х.С. Оптимизация переходных процессов электромеханических систем машин и её физическая реализуемость // Вестник Национального технического университета "ХПИ". – Харьков, 2010. – №26. – С.124-134. 5. Виттенберг И. Динамика систем твёрдых тел: Пер. с англ. – М.: Мир, 1980. – 292с.

Поступила в редколлегию 20.04.12